**EMELT MATEMATIKA TANMENET**

**Óratervtáblázatok**

**11. évfolyam (60 óra)**

|  |  |
| --- | --- |
| Téma | Óraszám |
| Gondolkodási módszerek | 10 |
| Számtan, algebra | 14 |
| Függvények, az analízis elemei | 26 |
| Ismétlés | 10 |

**1-2. Halmazok, De-Morgan azonosságok, logikai szita**

**3-4. Bizonyítási módszerek**

**5-6. Kombinatorika**

**7-8.Binomiális tétel, Pascal háromszög**

**9-10. Gráfok**

**11-12. Számhalmazok, számelmélet alaptétele, számrendszerek**

**13-14. Nevezetes azonosságok**

**15-16. Hatványozás, gyökvonás, permanencia elv**

**17-18. Elsőfokú paraméteres és többismeretlenes problémák**

**19-20. Másodfokú problémák, szélső érték keresés**

**21-22. Exponenciális és logaritmikus problémák**

**23-24. Trigonometrikus problémák**

**25-26. Számsorozatok, rekurzív sorozatok**

**27-28. Sorozat korlátossága, monotonitása, konvergencia**

**29-30.Számtani és mértani sorozatok**

**31-32. Végtelen sorok**

**33-34. Gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet**

**35-36. Függvénytani alapfogalmak**

**37-38. Összetett függvények**

**39-40. Függvények határértéke, folytonossága, korlátossága**

**41-42. Függvények**

**43-44. Differenciálhányados**

**45-46. Alapfüggvények deriváltja**

**47-48. Függvényvizsgálat differenciálszámítással**

**49-50. Gyakorlati példák**

**51-52. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**53-54. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**55-56. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**57-58. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**59-60. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**11. ÉVFOLYAM**

1. **Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok**

De-Morgan azonosságok

Megosztott figyelem, két illetve több szempont egyidejű követése. Alaphalmaz nélkül nincs komplementerhalmaz.

Logikai szita

Két vagy több szempont egyidejű követése. Szöveges megfogalmazások matematikai modellre fordítása.

Halmazok számossága. Véges és végtelen halmazok.

Annak megértése, hogy csak a véges halmazok elemszáma adható meg egy természetes számmal.

Megszámlálhatóan és nem megszámlálhatóan végtelen halmazok.

Annak tudatosítása, hogy csak a véges halmazok elemszáma adható meg természetes számmal. Különbség megszámlálhatóan végtelen és kontinuum végtelen halmaz között. Matematikatörténet: Georg Cantor.

Bizonyítási módszerek (direkt és indirekt bizonyítás, skatulya-elv, teljes indukció)

Sejtés, bizonyítás, cáfolás. Érvelés és vita. Érvek és ellenérvek. Ellenpélda szerepe. Megosztott figyelem. Bizonyítási igény kialakítása. Gondolatmenet tagolása, rendszerezés. Következtetés. Bizonyítási módszerek áttekintése.

Logika. Logikai műveletek: negáció, konjukció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Tétel és megfordítása. Minden és van olyan használata.

Matematikai és más jellegű érvelésekben a logikai műveletek felfedezése, megértése, önálló alkalmazása. A köznapi szóhasználat és a matematikai szóhasználat összevetése. Logikai és halmazelméleti műveletek kapcsolata. Matematikatörténet: Pólya György, George Boole.

Permutációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), variációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), kombinációk (ismétlés nélkül) definíciói, kiszámítására vonatkozó képletek és bizonyításaik.

Modell alkotása valós problémához. kombinatorikai modell. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Kombinatorikai problémák rendszerezése.

Binomiális együtthatók, egyszerű tulajdonságaik.

Binomiális tétel.

 Pascal-háromszög és tulajdonságai.

Jelek szerepe, alkotása, használata: célszerű jelölés megválasztásának jelenősége a matematikában. Matematikatörténet: Blaise Pascal, Erdős Pál.

Gráfok. Többszörös él, hurokél, út, kör, összefüggő gráf, egyszerű gráf, fa. Fa pontjai és élei száma közötti összefüggés.

Gráfok alkalmazása problémamegoldásban. Modell alkotása valós problémához: gráfmodell. Gráfok eszközjellegű használata problémamegoldásaban (számítógépek, elektromos hálózatok, úthálózat). Gondolatmenet megjelenítése gráffal.

1. **2.1. Alapműveletek, valós számok, oszthatóság, számrendszerek, algebrai kifejezések, hatvány, gyök, logaritmus**

Számhalmazok (természetes számok, egész számok, racionális számok, irracionális számok, valós számok). Adott műveletekre zárt számhalmazok. Műveleti tulajdonságok alkalmazása (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás). A valós számok és a számegyenes kapcsolata. Eligazodás a számhalmazok között. A racionális számok halmaza nem elegendő a számegyenes pontjainak jelölésére.

Számelmélet alaptétele. Végtelen sok prímszám van (bizonyítással). Összetett oszthatósági feladatok megoldása. Teljes indukció alkalmazása oszthatósági feladatokban. Természetes számok pozitív osztóinak száma. Prímtényezős felbontás, végtelen sok prímszám létezése. Nyitottság az érdekességekre. Bizonyítási igény fejlesztése, teljes indukciós bizonyítás fejlesztése. Átírás 10-es számrendszerből n alapú (n

A különböző alapú számrendszerek egyenértékűségének belátása. Matematikatörténet: Euklidesz, Eratosztenész, Euler, Fermat.

Polinom fokszáma, fokszám szerint rendezett alakja.

Nevezetes azonosságok: 2 (a ± b) , 2 (a + b + c) , 2 2 a −b , 3 3 a − b , 3 3 a + b . Feladatokban n n a −b , 2 +1 2 +1 + n n a b szorzattá alakításának alkalmazása. Régebbi ismeretek mozgósítása, összeillesztése, felhasználása. Műveletek elvégzése öszetettebb helyzetekben. Utalás (a + b) n kiszámolásra Pascal-háromszög segítségével. Geometria: azonosságok „rajzos” igazolása.

n irracionális, ha n nem négyzetszám. Indirekt bizonyítás. Végtelen szakaszos tizedestört alakban megadott racionális szám közönséges tört alakjának megadása. Számfogalom elmélyítése, számolási készség fejlesztése.

Permanencia-elv. Irracionális kitevőjű hatványok szemléletes értelmezése. A matematika belső fejlődésének felismerése, új fogalmak alkotása. Fogalmak módosítása újabb tapasztalatok, ismeretek alapján. A hatványfogalom célszerű kiterjesztése. Hatványozás és négyzetgyökvonás azonosságainak bizonyításai. Szorzat, hányados és hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságok bizonyítása. Más alapú logaritmusra való áttérés szabályának bizonyítása. Algebrai készség fejlesztése, számolás logaritmussal. Összetett algebrai kifejezések kezelése. Matematikatörténet: Napier, Kepler. A logaritmus fogalmának kialakulása, változása. Logaritmustáblázat.

* 1. **Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer**

Elsőfokú paraméteres egyenletek. Esetszétválasztás, divergens gondolkodás fejlesztése.

Elsőfokú, háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Megosztott figyelem, több szempont egyidejű követése. Számolási készség és algebrai ismeretek fejlesztése. Szöveges megfogalmazások matematikai modellre fordítása. A kapott eredmény értelmezése, valóságtartalmának vizsgálata.

Másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetése. Ismeretek tudatos memorizálása. Diszkrimináns fogalmának fontossága. Összefüggések a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között. Gyökök és együtthatók összefüggéseinek megismerése és alkalmazása feladatokban. Önellenőrzés: egyenlet megoldásának ellenőrzése. Másodfokú paraméteres egyenletek megoldása. Esetszétválasztás, divergens gondolkodás fejlesztése. Másodfokúra visszavezethető egyenletrendszerek megoldása. Matematikai modell megalkotása szöveg alapján. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. A megoldás ellenőrzése. A gyakorlati feladat összevetése a valósággal. Értelmezési tartomány, értékkészlet vizsgálattal valamint szorzattá alakítással megoldható összetett feladatok megoldása. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése.

Négyzetgyökös egyenletek – két négyzetreemeléssel megoldható feladatok. Ekvivalens és nem ekvivalens átalakítások. Egyszerű négyzetgyökös egyenlőtlenségek. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Összetettebb algebrai műveletek elvégzése. Ellenőrzés igénye és fontossága. Önellenőrzés képességének fejlesztése. Abszolút értéket tartalmazó egyenletek – Több abszolút értéket tartalmazó feladatok. Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek. Egy adott problémára két különböző módszer: algebrai és grafikus megoldás. Számolási készség és algebrai ismeretek fejlesztése. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése.

Összetett exponenciális és logaritmusos egyenletek és egyenletrendszerek megoldása. Egyszerű exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségek. Ismeretek mozgósítása. Modellek alkotása (algebrai modell): összetett exponenciális és logaritmikus egyenletekre, egyenletrendszerekre illetve egyszerű egyenlőtlenségekre vezető problémák. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Számológép tudatos használata.

Másodfokúra visszavezethető és az addíciós tételek alkalmazását igénylő trigonometrikus egyenletek megoldása. Egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségek. A matematika és a valós élet kapcsolata. Modellek alkotása (algebrai modell): trigonometrikus egyenletekre és egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségekre vezető problémák. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Ismeretek tudatos használata. Számológép tudatos használata.

Számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közép, a köztük lévő egyenlőtlenség. Algebrai bizonyítás két változóra. Szélsőérték-feladatok közepek segítségével. Másodfokú függvényre visszavezethető szélsőérték feladatok megoldása. Az eredmény és a valóság összevetése. Számítógépek alkalmazásának lehetősége a problémamegoldásban. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése.

1. **Függvények, az analízis elemei**

**3.1 Sorozatok**

Számsorozat fogalma, megadási módjai (utasítás, képlet, rekurzió). Annak tudatosítása, hogy a sorozatnak, mint függvénynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Rekurzív sorozatok értelmezése. Matematikatörténet: Fibonacci

Sorozatok korlátossága, monotonitása. Konvergencia fogalma. Divergens sorozatok létezése. Sorozatok tulajdonságainak a vizsgálata. Ismeretek memorizálása. Ismeretek tudatos alkalmazása. Konvergencia fogalmának bevezetése, megértése. Divergens és valódi divergens sorozatok fogalmának megértése. Példák konvergens és divergens sorozatokra. Konvergencia fogalmának alkalmazása feladatokban. Az n a , n n 1 1 n n ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ + ⎝ ⎠ sorozatok. Konvergens sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértékére vonatkozó tételek. Sorozatok konvergenciájának vizsgálata. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Ismeretek memorizálása. Ismeretek tudatos alkalmazása.

Számtani és mértani sorozat általános tagjára vonatkozó összefüggés és az összegképletek bizonyítása.

Számtani sorozat általános tagja kifejezhető az első tag és a differencia segítségével. Számtani sorozat első n tagjának az összege kifejezhető az első tag és a differencia segítségével. Mértani sorozat általános tagja kifejezhető az első tag és a kvóciens segítségével. Mértani sorozat első n tagjának az összege kifejezhető az első tag és a kvóciens segítségével. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek memorizálása.

Végtelen sorok. Mértani sor fogalma, összege. Példa nem konvergens sorra (harmonikus sor). Végtelen sok tag összegzése. Ismeretek memorizálása, tudatos alkalmazása. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése. Nyitottság az érdekességekre: filozófiai problémák és geometriai alkalmazások (fraktálok).

Gyűjtőjáradék és törlesztőrészlet számolása. Sorozatokról tanultak alkalmazása. Szövegértés. Modell alkotása: befektetés és hitel, különböző feltételekkel meghirdetett befektetések és hitelek vizsgálata. Egyéni döntés felelőssége. Modell összevetése a valósággal. Megosztott figyelem, két vagy több szempont egyidejű követése.

**3.2 Függvények határértéke, folytonossága, differenciálhatóság**

Függvénytani alapfogalmak rendszerezése: függvény fogalma, megadása, ábrázolása; függvények jellemzésének szempontjai – értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, zérushely, szélsőérték, paritás, periodicitás. (pontos definíciók). Definíciók pontos megfogalmazása. Korábbi ismeretek rendszerezése.

Függvények összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának fogalma. Függvények leszűkítése és kiterjesztése. Összetett függvény fogalma, inverzfüggvény fogalma. Összetett függvény képzése. Függvénytranszformációk. Függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa csak ott van értelmezve, ahol mindkét függvény egyszerre érelmezve van. Kívül-belül függvény: összetett függvény ott van értelmezve, ahol a belső függvény olyan értékeket vesz fel, amelyen a külső függvény értelmezve van. Megosztott figyelem: két vagy több szempont egyidejű követése. Ismeretek memorizálása, tudatos alkalmazása.

Függvények korlátossága. Konvex és konkáv függvények. Korlátosság és az értékkészlet kapcsolata. Függvénygörbe alakjának jellemzése, algebra és geometria összekapcsolása.

Függvény határértéke. A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések. Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke. A x sin x függvény vizsgálata, az x = 0 helyen vett határértéke.

A függvények folytonossága. Példák folytonos és nem folytonos függvényekre. Intervallumon folytonos függvények.

Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére: a függvénygörbe érintőjének iránytangense, pillanatnyi sebesség meghatározása.

A differenciálhatóság fogalma. A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény. Példák nem differenciálható függvényekre is. Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között. Alapfüggvények deriváltja: Konstans függvény, x n , trigonometrikus függvények deriváltja. Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. Műveletek differenciálható függvényekkel: függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja. Magasabbrendű deriváltak. Matematikatörténet: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.

A differenciálszámítás alkalmazásai: A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata. − Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény. − Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték.

Konvexitás vizsgálata deriválással. A konvexitás definíciója. Inflexiós pont. A második derivált és a konvexitás kapcsolata.

Függvényvizsgálat differenciálszámítással. (Polinomfüggvények vizsgálata) A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.

Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása. A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.

Érintő egyenletének felírása

**12. évfolyam (60 óra)**

|  |  |
| --- | --- |
| Téma | Óraszám |
| Függvények, az analízis elemei | 16 |
| Geometria | 22 |
| Valószínűség, statisztika | 8 |
| Ismétlés | 14 |

**1-2. Bevezetés az integrál fogalmához**

**3-4. Alsó és felső közelítőösszeg**

**5-6. Integrálhatóság**

**7-8. Primitív függvény, határozatlan integrál**

**9-10. Matematika történet: Newton Leinbnitz**

**11-12. Függvény alatti terület kiszámítása**

**13-14. Két függvénygörbe közötti terület**

**15-16. Forgástestek térfogata**

**17-18. Térelemek, nevezetes ponthalmazok**

**19-20.Egybevágósági transzformációk**

**21-22.Hasonlósági transzformációk**

**23-24. Pitagorasz tétel, Thalesz tétel**

**25-26. Magasságtétel, befogótétel**

**27-28. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek**

**29-30. Konvex sokszögek**

**31-32. Körrel kapcsolatos ismeretek**

**33-34. Szöfüggvények, addíciós tétel**

**35-36. Koordináta geometria – kör egyenlete**

**37-38. Koordináta geometria – parabola egyenlete**

**39-40. Statisztika**

**41-42. Eseményalgebra**

**43-44. Klasszikus valószínűségi modell**

**45-46. Binomiális eloszlás, hipergeometriai eloszlás, várható érték**

**47-48. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**49-50. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**51-52. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**53-54. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**55-56. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**57-58. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**59-60. Emelt érettségi típusfeladatok megoldása – vegyes feladatok a fenti témákból**

**12.ÉVFOLYAM**

**3. Függvények, az analízis elemei**

**3.3 Integrálszámítás**

Bevezető feladatok az integrál fogalmához: függvény grafikonja alatti terület, a megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület, a munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.

Kétoldali közelítés módszere. Alsó és felső közelítő összegek. A határozott integrál fogalma, jelölése. A szemléletes megközelítésre alapozva eljutás a pontos definícióig. Példa nem integrálható függvényre is. Negatív függvény határozott integrálja. A határozott integrál és a terület-előjeles terület. Az integrál közelítő kiszámítása. Matematikatörténet: Bernhard Riemann.

Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele. Korlátos és monoton függvények integrálhatósága. A határozott integrál tulajdonságai.

Az integrál, mint a felső határ függvénye. Integrálfüggvény. Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja. Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között. A primitív függvény fogalma. A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál: − hatványfüggvény, polinomfüggvény, − trigonometrikus függvények, − exponenciális függvény, logaritmusfüggvény. A Newton-Leibniz-tétel. Matematikatörténet: Newton, Leibniz, Euler.

Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra. Polinomfüggvények, szinusz és koszinuszfüggvény grafikonja alatti terület kiszámítása. Két függvénygörbe közötti terület meghatározása. Forgástest térfogatának meghatározása.

**4. Geometria**

**4.1. Alapfogalmak, geometriai transzformációk, síkbeli és térbeli alakzatok**

Térelemek: kitérő egyenesek távolsága és hajlásszöge. Absztrakt gondolkodás. Vázlat készítése. Geometriai fogalmak pontosítása.

Nevezetes ponthalmazok rendszerezése. Két térelemtől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza – síkban: parabola. Egyenlőtlenséggel meghatározott ponthalmazok. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Koordinátákkal megadott feltételek. Ponthalmazok értelmezése, megadása, felismerése. Definíciók pontos megfogalmazása, alkalmazása. Matematikatörténet: Descartes.

Geometriai transzformációk és a függvények kapcsolata. Egybevágósági transzformációk definíciói, síkidomok egybevágóságának fogalma, sokszögek egybevágóságának feltétele. Térbeli egybevágósági transzformációk. A geometriai transzformációk és a hétköznapi élet kapcsolatának felismerése. Megmaradó és változó tulajdonságok tudatosítása. A probléma megoldásához szükséges transzformáció felismerése.

Hasonlósági transzformáció fogalma. A geometriai transzformációk és a hétköznapi élet kapcsolatának felismerése. Hasonlóság megismerése. Megmaradó és változó tulajdonságok tudatosítása. A probléma megoldásához szükséges transzformáció felismerése. Párhuzamos szelők tétele és a tétel megfordítása. Párhuzamos szelőszakaszok tétele. A tapasztalatok rögzítése, alkalmazása. Sejtés, bizonyítás, bizonyítandó kifejezés helyes értelmezése. Szögfelezőtétel (bizonyítással). A bizonyítási igény fejlesztése, számolási készség fejlesztése.

Merőleges vetítés.

Pitagorasz tétele és a tétel megfordítása (bizonyítással). Tisztelet az elődök iránt, eredményeik ismerete és alkalmazása. A bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos és pontos alkalmazása. Matematikatörténet: Pitagorasz.

Thalész tétele és a tétel megfordítása (bizonyítással). Körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak (bizonyítással).

Tisztelet az elődök iránt, eredményeik ismerete és alkalmazása. A bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos és pontos alkalmazása. Matematikatörténet: Thalész.

Magasságtétel és befogótétel (bizonyítással). Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele. A tanultak alkalmazásával új, praktikus összefüggések megfogalmazása. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása. Geometriai feladatok megoldásához megfelelő tételek felismerése.

Húrnégyszög fogalma, húrnégyszögek tétele (bizonyítással), húrnégyszögek tételének megfordítása. Feladatok megoldása. A geometriai gondolkodás fejlesztése. Húrnégyszögek meghatározása, tulajdonságaik. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása. Érintőnégyszög fogalma, érintőnégyszögek tétele (bizonyítással), érintőnégyszögek tételének megfordítása. Feladatok megoldása. A geometriai gondolkodás fejlesztése. Érintőnégyszögek meghatározása, tulajdonságaik. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása

Konvex sokszög átlóinak számára vonatkozó tétel (bizonyítással), konvex sokszög belső szögeire vonatkozó tétel (bizonyítással), konvex sokszög külső szögeire vonatkozó tétel (bizonyítással). Fogalmak alkotása specializálással: konvex sokszög, szabályos sokszög. A geometriai gondolkodás fejlesztése. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.

Kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra (bizonyítással). A geometriai gondolkodás fejlesztése. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása

Kerületi és középponti szögek fogalma. Kerületi és középponti szögek tétele (bizonyítással), kerületi szögek tétele (bizonyítással). Látókör fogalma. A geometriai és a valós élet kapcsolatának felismerése. Geometriai megfigyelések és tételek megfogalmazása. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.

**4.2 Vektorok, trigonometria, koordinátageometria, térgeometria**

Koordinátáikkal adott vektorok hajlásszögének meghatározása. Egyértelmű vektorfelbontás tétele. Skaláris szorzat koordinátákból való kiszámítására vonatkozó tétel (bizonyítással). A matematika belső fejlődésének felismerése. Új fogalmak alkotása. Vektorok eszközjellegű használata. A skaláris szozat újszerűségének felfedezése. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.

Szögfüggvények: addíciós képletek alkalmazása egyszerű feladatokban (két szög összegének illetve különbségének szinusza, koszinusza, tangense; kétszeres szögek szinusza, koszinusza, tangense). Ismeretek alkalmazása. Ismeretek memorizálása.

Szinusztétel (bizonyítással), koszinusztétel (bizonyítással). A matematika belső fejlődésének megismerése. Általános eset és különlegeseset viszonya. Az összefüggés felfedezése és alkalmazása. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.

Szakasz osztópontjai, háromszög súlypontja: szakasz felezőpontjára vonatkozó összefüggés (bizonyítással), szakasz harmadolópontjainak kiszámítására vonatkozó összefüggés (bizonyítással), szakasz m:n arányú osztópontjára vonatkozó összefüggés, háromszög súlypontjára vonatkozó összefüggés (bizonyítással). Geometriai szemléletformálás egy új nézőpontból, geometriai ismeretek megfogalmazása algebrai alakban. Képletek értelmezése és használata. Elemi geometriai ismeretek alkalmazása, vektorok használata, koordináták számolása.

Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens. A különböző jellemzők közötti kapcsolat értése, használata.

Az egyenes egyenletének levezetése a síkban különböző kiindulási adatokból. (Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes egyenlete; adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete; iránytényezős egyenlet.) Alakzat egyenlete fogalom megértése. Tudományterületek összekapcsolása. Az egyenest jellemző adatok, köztük levő összefüggések értése, használata. Síkbeli egyenesek hajlásszögének meghatározása. Geometria és számolás. Skaláris szorzat használata.

A kör egyenletének levezetése. Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata. Alakzat és egyenletének összekapcsolása. Kör egyenletének megismerése. Kör és egyenes kölcsönös helyzete. Körhöz külső pontból húzott érintő egyenletének felírása. Két kör kölcsönös helyzete. Két kör metszéspontjainak meghatározása. Geometriai fogalmak megjelenítése algebrai formában is. Algebrai ismeretek mozgósítása geometriai problémákban is. Geometriai ismeretek mozgósítása. Elsőfokú illetve másodfokú egyenletrendszer megoldása. Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió. Szerkeszthetőségi kérdések.

A parabola tengelyponti egyenlete, az 𝑥 2 = 2𝑝𝑦 alakú egyenlet levezetése. Feladatok megoldása a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű parabolákkal. Alakzat és egyenletének összekapcsolása. Geometriai fogalmak megjelenítése algebrai formában is. Algebrai és geometriai ismeretek mozgósítása geometriai problémákban is.

Csonka gúla és csonka kúp térfogatképlete (bizonyítással) Valós problémához modell alkotása: geometriai modell. A test felismerése. Bizonyítási igény fejlesztése. Ismeretek tudatos memorizálása.

1. **Valószínűségszámítás, statisztika**

Számsokaságok jellemzése: átlag, medián, módusz, szórás, átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés. A medián és az átlag minimumtulajdonsága. Adatok rendezése, ábrázolása. Táblázatok készítése, értelmezése. Együttváltozó mennyiségek összetartozó adatpárjai. Számítógép használatának lehetőségei. Következtetések levonása írott, ábrázolt és számszerű információ összekapcsolásával. Az információk helyes értelmezése. Nagy adathalmaz vizsgálata kevés statisztikai jellemzővel: előnyök és hátrányok.

Eseményalgebra. Események összege, szorzata, komplementere. A matematika belső fejlődésének felismerése. Kapcsolat a halmazok és a logika műveleteivel. A műveletek újszerűségének felfedezése. Matematikatörténet: George Boole.

Klasszikus valószínűségi modell. Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége. Kizáró események, független események valószínűsége. Feltételes valószínűség. Véletlen esemény valószínűsége. A modell és valóság kapcsolata. Példák független és nem független eseményekre. Új definíciók megfogalmazása. Nagy számok törvénye. (Szemléletes tárgyalás képletek nélkül.) Geometriai valószínűség. A geometriai valószínűség fogalmának megismerése. A matematika alkalmazása az élet különböző területein. Matematikatörténet: Pólya György, Rényi Alfréd.

Binomiális eloszlás, hipergeometriai eloszlás. Várható érték diszkrét egyenletes és binomiális eloszlás esetén. A matematika alkalmazása az élet különböző területein. Nevezetes eloszlások megismerése. Várható érték kiszámítása.